Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens (73 55 02 28)

EKSAMEN I MA1102/MA6102 GRUNNKURS I ANALYSE II

Onsdag 2. desember 2009
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 23. desember 2009

Hjelpemidler (Kode D): Bestemt kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal ha en god begrunnelse.
Du finner et ark med formler etter oppgavene.

Oppgave 1 Vis at funksjonen $f(x) = 2x - \cos x$ bare har ett nullpunkt. Bruk deretter Newtons metode til å finne et tall x^* slik at $|f(x^*)| < 0{,}01$.

Oppgave 2 Vi vil se på kurven K gitt ved parameterfremstillingen

$$x = \sqrt{3}\sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Vis at K er en ellipse, og finn brennpunktene.

b) Finn tangentene til K som går gjennom punktet $(0, 2)$.

c) Vis at buelengden til K kan skrives som $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + \cos u}\, du$.

Oppgave 3 Estimer integralet $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ med en feil mindre enn 0,05.

Oppgave 4 Kurven gitt i polarkoordinater ved $r^2 = \cos(2\theta)$ danner to "løkker" i planet. Finn arealet avgrenset av "løkken" som går gjennom punktet $(-1, 0)$.

Oppgave 5 Vi vil se på funksjonen f definert ved rekken

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,2^n} x^{2n}.$$

a) For hvilke x konvergerer rekken?

b) Er rekken uniformt konvergent på intervallet $[-1, 1]$?

c) Vis at f er en løsning til initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + y = 1, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$