MA0301
Elementær Diskret matematikk

Prøveeksamen
Våren 2024

Hvis du leverer inn prøvekesamen som øving 13, er kravet for godkjent lik minst 40 poeng.

1 Info

Husk at $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ og $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

2 Multiple choice

$\boxed{1}$ La $A = \{-2, -1, 0\}$ og $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) (Tallsvar, 2 poeng) Hvor mange elementer er det i $A \cup B$?

b) (Tallsvar, 2 poeng) Hvor mange elementer er det i $A \times B$?

c) (Tallsvar, 2 poeng) Hvor mange elementer er det i $\mathcal{P}(A \setminus B)$?

d) (Ja/nei, 2 poeng) $(A \setminus B) \times A$ og B har samme kardinalitet.

e) (Ja/nei, 2 poeng) Det finnes en surjektiv funksjon fra B til A.

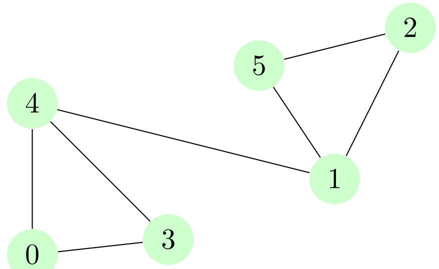
$\boxed{2}$ La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) (Tallsvar, 2 poeng) Hvor mange permutasjoner av A finnes det?

b) (Tallsvar, 4 poeng) Hvor mange permutasjoner av A finnes det, slik at summen av det første og det siste tallet er et partall?

c) (Tallsvar, 4 poeng) Hvor mange permutasjoner av A finnes det, slik at de første fem tallene alle er mindre enn eller lik 8?

$\boxed{3}$ La $G = (V, E)$ være som tegnet under.



Betrakt nå predikatet

$$P(x, y) \equiv ((x = y) \vee (\{x, y\} \in E))$$

over universet V. Altså er for eksempel $P(1,1)$ sann, men $P(3,1)$ er usann fordi $\{3,1\} \notin E$.

Ta stilling til hver av påstandene under.

a) (Ja/nei, 2 poeng) $\forall x \forall y P(x,y)$

b) (Ja/nei, 2 poeng) $\exists x \forall y P(x,y)$

c) (Ja/nei, 2 poeng) $\forall x \exists y \exists z (P(x,y) \land P(x,z) \land y \neq z)$

d) (Ja/nei, 2 poeng) $\forall x \forall y \exists z (P(x,z) \land P(z,y))$

e) (Ja/nei, 2 poeng) $\forall x \forall y \exists z \exists t (P(x,z) \land P(z,t) \land P(t,y))$

3 Tekstsvar, begrunnelse (besvares på papir)

4 La $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ og $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

a) (5 poeng) La $f\colon A \times B \to \mathbb{N}$ være definert ved $f(x,y) = xy$. Er f injektiv? Er f surjektiv?

b) (5 poeng) Beskriv en bijektiv funksjon fra A til $\mathbb{N}$.

5 La $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \leq 3\}$

a) (5 poeng) Finn alle elementer i R.

b) (5 poeng) R er en relasjon over $\mathbb{N}$. For hver av egenskapene refleksiv, symmetrisk og transitiv, finn et moteksempel eller vis at R har den gitte egenskapen.

c) (5 poeng) La nå $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ og $S = \{(x,y) \in A^2 \mid y \text{ kan deles uten rest på } x\}$. Tegn relasjonen S. *(Hint: Du kan gjerne tegne et Hasse-diagram).*

6 La P, Q, R være utsagnsvariabler.

a) (5 poeng) La $F = (P \to (Q \land R))$. Fyll ut sannhetsverditabellen til F.

b) (5 poeng) Avgjør om P er en logisk konsekvens av $Q \land F$.

c) (5 poeng) Avgjør om $\neg P$ er en logisk konsekvens av $(\neg Q) \land F$.

7 La $A = \{0, 1\}$. Husk at A^* da er alle strenger over A, altså alle endelige strenger eller ord skrevet med tegnene 0 og 1.

a) (5 poeng) Finn et regulært uttrykk som beskriver alle strenger i A^* som inneholder nøyaktig én 0'er.

b) (5 poeng) Finn en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner nøyaktig strengene i A^* som inneholder et partall antall 0'ere og et partall antall 1'ere.

c) (5 poeng) La $\mathcal{S}_1$ være et regulært språk over A. Vis at $\mathcal{S}_1 \cup \{\Lambda\}$ er regulært. *(Husk at Λ er den tomme strengen)*

$\boxed{8}$ La $A = \{0, 1\}$. Vi definerer induktivt en delmengde L av A^* som følger.

La $\mathcal{B} = \{1\}$. Betrakt nå de to operasjonene under

$$x \overset{f}{\mapsto} xx \tag{1}$$

$$x \overset{g}{\mapsto} x0 \tag{2}$$

Vi kan nå presist definere L som tillukningen av $\mathcal{B}$ under de to operasjonene over. Altså er L nøyaktig de strengene som kan finnes ved å anvende f og g vilkårlig antall ganger på basis-elementet 1 i $\mathcal{B}$.

a) (5 poeng) Forklar hvorfor $100100 \in L$.

b) (5 poeng) Vis at alle strenger i L starter med en 1'er.

c) (5 poeng) Vis at L ikke er et regulært språk.