MA0301
Elementær Diskret matematikk

Løsningsforslag Eksamen vår 2024

Våren 2024

Flervalg (sant/usant)

Riktig svar på en deloppgave gir 2 poeng, feil svar gir 0 poeng.

1 Vi definerer en relasjon R på $\mathbb{Z}$ som følger.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq (y + 10)\}$$

a) R er refleksiv
b) R er symmetrisk
c) R er transitiv
d) R er anti-symmetrisk
e) R er en delvis ordning

Løsning: Oppgave 1

a) R er refleksiv fordi $x \leq x + 10$ for alle $x \in \mathbb{Z}$.
b) R er ikke symmetrisk fordi for eksempel $(0, 20) \in R$ men $(20, 0) \notin R$.
c) R er ikke transitiv fordi for eksempel $(7, 0) \in R$ og $(14, 7) \in R$ men $(14, 0) \notin R$.
d) R er ikke anti-symmetrisk fordi for eksempel $(0, 1) \in R$ og $(1, 0) \in R$, men $0 \neq 1$.
e) R er ikke en delvis ordning, fordi en delvis ordning blant anet må være transitiv.

2 La P, Q, R være utsagnsvariabler. Ta stilling til påstandene under.

a) $(P \vee \neg P)$ er oppfyllbar.
b) $P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg P$ er oppfylbar.
c) $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P) \wedge (\neg R)$ er oppfylbar.
d) $P \to (Q \to P)$ er en tautologi
e) P er en logisk konsekvens av $(Q \to R) \wedge (R \to P)$

Løsning: Oppgave 2

a) Sann
b) Usann
c) Usann
d) Sann

e) Usann

3 Vi betrakter predikatet $P(x) \equiv (x^2 > 10)$ over universet $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$.

a) $\exists x P(x)$

b) $\forall x P(x)$

c) $\neg\exists x(\neg P(x))$

d) $\forall x(P(x) \to P(x+1))$

e) $\forall x \forall y((P(x) \land P(y)) \to P(x \cdot y))$

Løsning: Oppgave 3

a) Sann

b) Usann (fordi for eksempel $P(3)$ er usann)

c) Ekvivalent med b), så usann.

d) Usann. Vi har $P(-4)$ men $\neg P(-3)$.

e) Sann. Hvis $x^2 > 10$ og $y^2 > 10$ så er $(xy)^2 = x^2y^2 > 100 > 10$.

Skriftlige svar

4 La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ og $C = \{5, 6, 7\}$.

a) (2 poeng) Hvor mange elementer er det i mengden $A \times B$?

b) (2 poeng) Hvor mange elementer er det i mengden $\mathcal{P}(A \times B)$?

c) (2 poeng) Hvor mange elementer er det i $\{X \in \mathcal{P}(A \cup B) \mid 1 \notin X\}$?

d) (2 poeng) Finn $(B \times A) \cap (A \times A)$.

e) (2 poeng) Forklar hvorfor det ikke finnes en injektiv funksjon fra $A \cup C$ til $A \cup B$.

Løsning: Oppgave 4

a) $3 \times 3 = 9$.

b) 2^9

c) $A \cup B$ har 5 elementer. $\mathcal{P}(A \cup B)$ har 2^5 elementer. Det er like mange delmengder av $A \cup B$ som inneholder 1 og som ikke inneholder 1. Vi har altså $2^5/2 = 2^4$ delmengder som ikke inneholder 1.

d) Første koordinat må ligge i $B \cap A$ og andre koordinat i A. Vi får da $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

e) Da $A \cup C$ har 6 elementer og $A \cup B$ har 5, gir duehullprinsippet gir oss at det for enhver funksjon fra $A \cup C$ til $A \cup B$ må eksistere (minst) to elementer i $A \cup C$ som sendes til samme element.

5 Vi definerer for et vilkårlig heltall a rekursivt en funksjon f_a fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$ som følger.

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x = 0 \\ 2f_a(x-1) - 3 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) (2 poeng) Regn ut $f_4(2)$.

b) (3 poeng) Si at $f_x(2) = 19$. Hva er x?

c) (5 poeng) Vis at $f_3(i) = 3$ for alle naturlige tall i. *(Hint: Bruk induksjon.)*

Løsning: Oppgave 5

a) Vi regner ut iterativt fra bunnen og oppover. $f_4(0) = 4$, $f_4(1) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ og til slutt $f_4(2) = 10 - 3 = 7$.

b) Vi har $f_x(2) = 2f_x(1) - 3 = 2(2f_x(0) - 3) - 3 = 4f_x(0) - 6 - 3 = 4x - 9 = 19$, så $x = 28/4 = 7$.

c) Vi bruker induksjon. Basis: $f_3(0) = 3$. Anta nå at $f_3(n) = 3$ for et vilkårlig naturlig tall n. Da er $f_3(n+1) = 2f_3(n) - 3 = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$ som ønsket.

$\boxed{6}$ Vi definerer i denne oppgaven induktivt en delmengde $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som følger.

Vi lar $\mathcal{B} = \{(0,0)\}$ være basismengden til A. Videre betrakter vi operasjonene `add` og `incr` definert ved

$$(x,y) \xmapsto{\texttt{add}} (x+y,0)$$
$$(x,y) \xmapsto{\texttt{incr}} (x+1,y+1)$$

presist definerer vi nå A som tillukningen av $\mathcal{B}$ under de to operasjonene `add` og `incr`.

(For eksempel er da $\texttt{add}(\texttt{incr}(0,0)) = (2,0)$*, så* $(2,0) \in A$*.)*

a) (5 poeng) Vis, gjerne med strukturell induksjon, at $x \geq y$ for alle $(x,y) \in A$.

b) (5 poeng) Vis at et par $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er et element i A hvis og bare hvis det eksisterer naturlige tall n og m slik at $x = 2n + m$ og $y = m$.

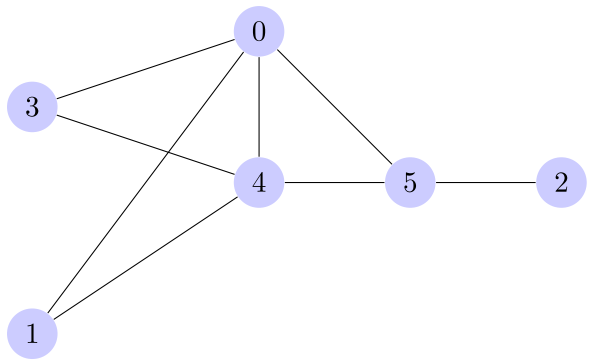
Løsning: Oppgave 6

a) Vi bruker strukturell induksjon. Basistilfellet er da at $0 \geq 0$. Anta nå at (x,y) er et par i A slik at $x \geq y$. Da er $\texttt{incr}(x,y) = (x+1, y+1)$. Da $x \geq y$ er $x+1 \geq y+1$. Videre er $\texttt{add}(x,y) = (x+y,0)$. Da x,y begge er naturlige tall er summen av dem minst lik 0, så $x+y \geq 0$. Dette fullfører beviset.

b) Det er to ting å vise. Først, la n,m være heltall. Paret $(2n+m,m)$ er i A fordi det er lik $\texttt{incr}^m(\texttt{add}(\texttt{incr}^n(0,0)))$.
Vi viser med strukturell induksjon at alle par i A er på den ønskede formen.
Basis: $(0,0)$ er på den ønskede formen, fordi vi kan velge $n=0$ og $m=0$.
Induksjonssteg: Anta at (x,y) er et par i A på den ønskede formen, altså $(x,y) = (2n+m,m)$. Da er $\texttt{add}(x,y)$ lik $(2n+2m,0) = (2(n+m),0)$, som er på den ønskede formen. Videre er $\texttt{incr}(x,y) = (2n+m+1, m+1) = (2n+(m+1),(m+1))$ som også er på den ønskede formen. Dette fullfører beviset.

$\boxed{7}$ La G være grafen tegnet under. I neste avsnitt følger en repetisjon av definisjonen av vandring, sti, krets og sykel.

Husk at en vandring i en graf er en rekke noder hvor etterfølgende noder er naboer. En sti er en vandring som ikke besøker samme node mer enn én gang. Lengden på en vandring er lik antall kanter som besøkes. En vandring er lukket om den starter og slutter i samme node. En *krets* i en graf er en lukket vandring som ikke besøker noen kanter mer enn én gang, og en sykel er en *krets* av lengde mer enn 0 som utenom start og slutt aldri er innom samme node to ganger. Merk: Det følger at å stå i ro i en node teller som en krets, men ikke som en sykel.



a) (5 poeng) Finnes det en Eulerkrets i G?

b) (5 poeng) Finn alle noder v i G slik at $G - v$ er et tre.

c) (5 poeng) Vi sier at to sykler er like om de besøker samme mengde kanter. Gitt dette er for eksempel $0-3-4-0$ og $4-3-0-4$ to ulike lukkede vandringer, men som beskriver samme sykel i G. Med denne definisjonen, hvor mange sykler eksisterer i G?

(Hint: Alle sykler i G må besøke noden 0, så vi kan anta at vi starter i 0.)

d) (5 poeng) La H være en vilkårlig endelig graf med en node v slik at $H - v$ er et tre. La n være graden til v i H. Gitt at vi teller antall sykler på samme måte som i deloppgavene over, vis at det finnes nøyaktig $n(n-1)/2$ sykler i H.

(Hint: Det kan være nyttig å huske at $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$.)

Løsning: Oppgave 7

a) Nei, da ikke alle nodene har partallsgrad.

b) $G - v$ er et tre nøyaktig om den er sammenhengende og ikke har sykler. Nodene 0 og 4 er de eneste nodene som alle sykler må gå innom, derfor er det nødvendig og tilstrekkelig å fjerne en av disse to nodene.

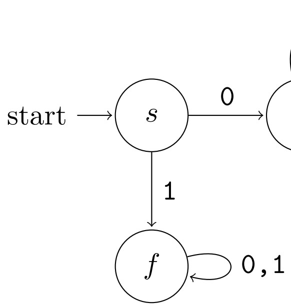
c) Vi har 6 sykler: $0-5-4-3-0$, $0-5-4-1-0$, $0-5-4-0$, $0-4-3-0$, $0-4-1-0$ og $0-1-4-3-0$.

d) Alle sykler i H må besøke v. Vi antar derfor at en sykel begynner i noden v. Dette gjør at vi bare må justere for om vi går med eller mot klokken for å unngå dobbeltelling. Gitt to naboer til v, er det nøyaktig en sti i $H - v$ mellom dem. Det finnes derfor for ethvert par av naboer til v, si x og y, nøyaktig én sykel $v - x - \cdots - y - v$. Derfor finnes det totalt $\binom{n}{2}$ sykler i H.

$\boxed{8}$ La $A = \{0, 1\}$. Husk at A^* da er mengden av endelige strenger over A, altså inneholder A^* alle endelige bitstrenger inklusive den tomme strengen Λ.

a) (5 poeng) Finn alle strenger i A^* som *ikke* ligger i språket som det regulære uttrykket $(0 \mid 1)(0 \mid 1)(0 \mid 1)^*$ representerer.

b) (5 poeng) Forklar med ord eller beskriv med et regulært uttrykk strengene over A som aksepteres av tilstandsmaskinen tegnet under. Aksepterende tilstander er markert med dobbel rand.



c) (5 poeng) La $\mathcal{S} \subseteq A^*$ være språket av strenger over A som *ikke* inneholder 3 etterfølgende `1`-ere. Finn en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner nøyaktig strengene i $\mathcal{S}$. *(Altså er for eksempel* `0101101` *i språket* $\mathcal{S}$*, men* `011101` *er ikke i* $\mathcal{S}$*.)*

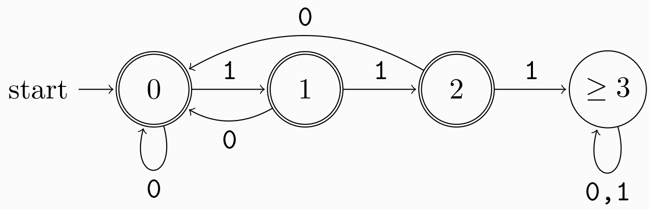
d) (5 poeng) Vis at det ikke finnes en tilstandsmaskin med 3 tilstander som gjenkjenner nøyaktig strengene i $\mathcal{S}$ som definert i deloppgaven over.

Løsning: Oppgave 8

a) Bitstrengene 0, 1 og Λ ligger ikke i språket.

b) Strengene som aksepteres er bitstrenger som starter med 0 og som slutter på 1.

c)



d) Anta at T er en tilstandsmaskin med 3 tilstander som aksepterer alle strengene i $\mathcal{S}$. Betrakt de fire strengene $\Lambda, 1, 11, 111$. Ved duehullprinsippet finnes det to strenger blant disse fire, si a og b, slik at T i samme tilstand etter å ha dem. Anta at a er den lengste av disse to strengene (vi kan anta dette, fordi vi ellers bare kunne byttet navn på a og b). Si videre at a har lengde $n \leq 3$. La s være strengen som består av $3-n$ enere på rad. Da er as av lengde 3, og bs av lengde mindre enn 3. Da bs er i $\mathcal{S}$, vil T akseptere bs. Da T er i samme tilstand etter å ha lest a som etter å ha lest b, vil T også være i samme tilstand etter å ha lest as som etter å ha lest bs. Da T ender i en aksepterende tilstand etter å ha lest bs vil den ende i samme aksepterende tilstand etter å ha lest as. Altså vil T feilaktig akseptere as.
Vi har nå vist at en vilkårlig tilstandsmaskin maskin med 3 tilstander som aksepterer alt i $\mathcal{S}$ nødvendigvis vil, feilaktig, akseptere strenger utenfor $\mathcal{S}$ også. Dermed finnes det ingen tilstandsmaskin med 3 strenger som aksepterer nøyaktig strengene i $\mathcal{S}$.