NTNU
Institutt for matematiske fag

MA0301
Elementær Diskret matematikk

Eksamen vår 2024

Våren 2024

Flervalg (sant/usant)

Riktig svar på en deloppgave gir 2 poeng, feil svar gir 0 poeng.

$\boxed{1}$ Vi definerer en relasjon R på $\mathbb{Z}$ som følger.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq (y + 10)\}$$

a) R er refleksiv
b) R er symmetrisk
c) R er transitiv
d) R er anti-symmetrisk
e) R er en delvis ordning

$\boxed{2}$ La P, Q, R være utsagnsvariabler. Ta stilling til påstandene under.

a) $(P \vee \neg P)$ er oppfyllbar.
b) $P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg P$ er oppfylbar.
c) $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P) \wedge (\neg R)$ er oppfylbar.
d) $P \to (Q \to P)$ er en tautologi
e) P er en logisk konsekvens av $(Q \to R) \wedge (R \to P)$

$\boxed{3}$ Vi betrakter predikatet $P(x) \equiv (x^2 > 10)$ over universet $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$.

a) $\exists x P(x)$
b) $\forall x P(x)$
c) $\neg \exists x (\neg P(x))$
d) $\forall x (P(x) \to P(x + 1))$
e) $\forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \to P(x \cdot y))$

Skriftlige svar

$\boxed{4}$ La $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$ og $C = \{5, 6, 7\}$.

a) (2 poeng) Hvor mange elementer er det i mengden $A \times B$?

b) (2 poeng) Hvor mange elementer er det i mengden $\mathcal{P}(A \times B)$?

c) (2 poeng) Hvor mange elementer er det i $\{X \in \mathcal{P}(A \cup B) \mid 1 \notin X\}$?

d) (2 poeng) Finn $(B \times A) \cap (A \times A)$.

e) (2 poeng) Forklar hvorfor det ikke finnes en injektiv funksjon fra $A \cup C$ til $A \cup B$.

$\boxed{5}$ Vi definerer for et vilkårlig heltall a rekursivt en funksjon f_a fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$ som følger.

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x = 0 \\ 2f_a(x-1) - 3 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) (2 poeng) Regn ut $f_4(2)$.

b) (3 poeng) Si at $f_x(2) = 19$. Hva er x?

c) (5 poeng) Vis at $f_3(i) = 3$ for alle naturlige tall i. *(Hint: Bruk induksjon.)*

$\boxed{6}$ Vi definerer i denne oppgaven induktivt en delmengde $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som følger.

Vi lar $\mathcal{B} = \{(0,0)\}$ være basismengden til A. Videre betrakter vi operasjonene `add` og `incr` definert ved

$$
\begin{aligned}
(x, y) &\xmapsto{\texttt{add}} (x + y, 0) \\
(x, y) &\xmapsto{\texttt{incr}} (x + 1, y + 1)
\end{aligned}
$$

presist definerer vi nå A som tillukningen av $\mathcal{B}$ under de to operasjonene `add` og `incr`.

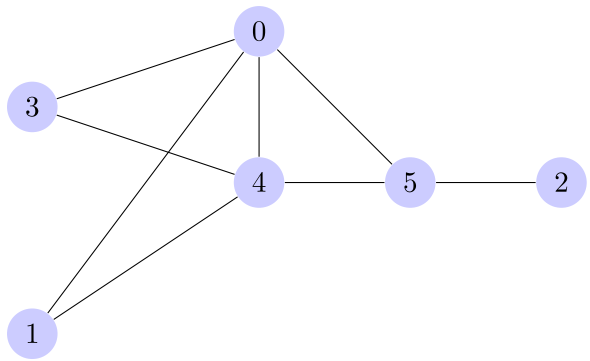
(For eksempel er da $\texttt{add}(\texttt{incr}(0,0)) = (2,0)$*, så* $(2,0) \in A$*.)*

a) (5 poeng) Vis, gjerne med strukturell induksjon, at $x \geq y$ for alle $(x, y) \in A$.

b) (5 poeng) Vis at et par $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er et element i A hvis og bare hvis det eksisterer naturlige tall n og m slik at $x = 2n + m$ og $y = m$.

$\boxed{7}$ La G være grafen tegnet under. I neste avsnitt følger en repetisjon av definisjonen av vandring, sti, krets og sykel.

Husk at en vandring i en graf er en rekke noder hvor etterfølgende noder er naboer. En sti er en vandring som ikke besøker samme node mer enn én gang. Lengden på en vandring er lik antall kanter som besøkes. En vandring er lukket om den starter og slutter i samme node. En *krets* i en graf er en lukket vandring som ikke besøker noen kanter mer enn én gang, og en sykel er en *krets* av lengde mer enn 0 som utenom start og slutt aldri er innom samme node to ganger. Merk: Det følger at å stå i ro i en node teller som en krets, men ikke som en sykel.



a) (5 poeng) Finnes det en Eulerkrets i G?

b) (5 poeng) Finn alle noder v i G slik at $G - v$ er et tre.

c) (5 poeng) Vi sier at to sykler er like om de besøker samme mengde kanter. Gitt dette er for eksempel $0 - 3 - 4 - 0$ og $4 - 3 - 0 - 4$ to ulike lukkede vandringer, men som beskriver samme sykel i G. Med denne definisjonen, hvor mange sykler eksisterer i G?

(Hint: Alle sykler i G må besøke noden 0, så vi kan anta at vi starter i 0.)

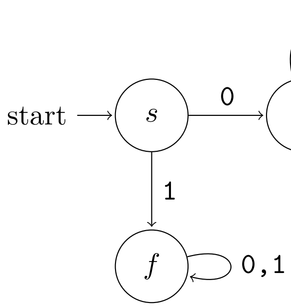
d) (5 poeng) La H være en vilkårlig endelig graf med en node v slik at $H - v$ er et tre. La n være graden til v i H. Gitt at vi teller antall sykler på samme måte som i deloppgavene over, vis at det finnes nøyaktig $n(n-1)/2$ sykler i H.

(Hint: Det kan være nyttig å huske at $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$.)

$\boxed{8}$ La $A = \{0, 1\}$. Husk at A^* da er mengden av endelige strenger over A, altså inneholder A^* alle endelige bitstrenger inklusive den tomme strengen Λ.

a) (5 poeng) Finn alle strenger i A^* som *ikke* ligger i språket som det regulære uttrykket $(0 \mid 1)(0 \mid 1)(0 \mid 1)^*$ representerer.

b) (5 poeng) Forklar med ord eller beskriv med et regulært uttrykk strengene over A som aksepteres av tilstandsmaskinen tegnet under. Aksepterende tilstander er markert med dobbel rand.



c) (5 poeng) La $\mathcal{S} \subseteq A^*$ være språket av strenger over A som *ikke* inneholder 3 etterfølgende 1-ere. Finn en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner nøyaktig strengene i $\mathcal{S}$. *(Altså er for eksempel 0101101 i språket $\mathcal{S}$, men 011101 er ikke i $\mathcal{S}$.)*

d) (5 poeng) Vis at det ikke finnes en tilstandsmaskin med 3 tilstander som gjenkjenner nøyaktig strengene i $\mathcal{S}$ som definert i deloppgaven over.